Смешанные стратегии.

$X=\{1,2,\dots,m\}$ $\quad p=(p_1,\dots,p_m)\in P=\{p \mid \sum_{i=1}^{m} p_i=1,\ p_i\geq 0,\ i=\overline{1,m}\}$

Реализация p: 

← равномерно распр. случайная величина.

$p=\left(\frac{5}{12},\frac{7}{12}\right)$ — реализовать с помощью подбрасывания игральной кости два раза

исходы: $(1,1), (1,2), \dots (6,1), \dots, (6,6)$

Если исход среди первых 15, то выбираем $i=1$ в противном случае $i=2$.

Аналогично $p=\left(\frac{5}{12},\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$.

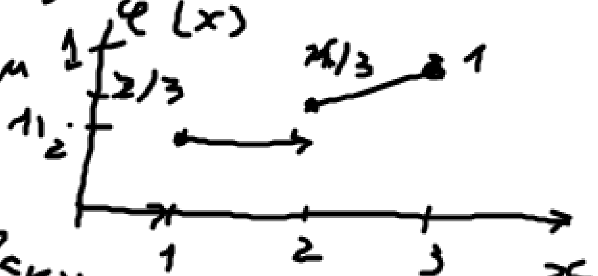
X - выпуклый компакт I_{x^0} - мера, сосредоточенная в $x^0\in X$

$\varphi=\sum_{i=1}^{m} p_i I_{x^i}$, $p\in P$. С вероятностью p_i выбирает x^i.

Как реализовать стратегию $\varphi = \frac{1}{4} I_{x^1} + \frac{3}{4} I_{x^2}$ с помощью подбрасывания монеты?

Пусть $X = [a, b]$, $\varphi(x)$ – функция распределения на X, по определению $\varphi(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$ – непрерывна справа, не убывает, $\varphi(x) = 0$, $x < a$, $\varphi(x) = 1$, $x \geq b$.

Рассмотрим



интегрирование по $\varphi(x)$

$$J = \int_1^3 h(x)\, d\varphi(x) = \frac{1}{2} h(1) + \frac{1}{6} h(2) + \int_2^3 \frac{h(x)}{3} dx$$

Например

Как реализовать $\varphi(x)$?

Бросаем равномерно распред. ξ на $[0, 1]$.

Если $\xi \in [0, 1/2)$, то $x = 1$

–‖– $\xi \in [1/2, 2/3)$, то $x = 2$

–‖– $\xi \in [2/3, 1]$, то $x = 3\xi$

$$J = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \int_2^3 \frac{1}{3} dx = 1.$$

В модели "нападение-защита" как реализовать

$\varphi^0 = \frac{1}{2} I_{x(1)} + \frac{1}{4} I_{x(2)} + \frac{1}{4} I_{x(3)}$? При каких μ_i, $i = 2,3$

φ^0 оптимальна, если $\mu_1 = 1$?

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k}}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k}}, \; i=2 \Rightarrow \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mu_2 = \mu_3 = 2.$$

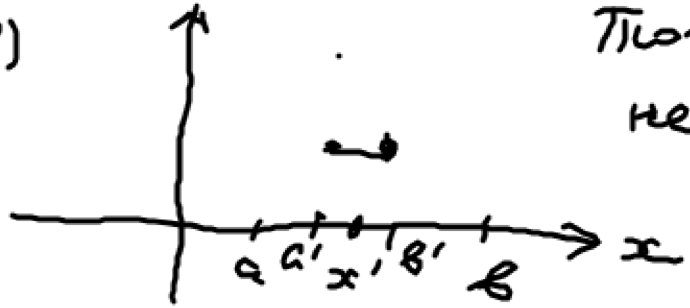
Спектр смешанной стратегии $Sp\varphi$.

$x' \in Sp\varphi$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists [a', b'] \ni x'$: $b' - a' < \varepsilon$ и $\varphi(b') - \varphi(a') > 0$.

$Sp\varphi$ - замкнутое в $[a, b]$. Действительно, покажем, что дополнение $X \setminus Sp\varphi$ открытое мн-во.

Если $x^0 \in X \setminus Sp\varphi$, то $\exists \varepsilon > 0 : \forall [a', b'] \ni x' : b' - a' < \varepsilon$

$\varphi(b')=\varphi(a')$



Тогда $\forall\ x\in(a';b')$ не принадлежит $Sp\varphi$.

Пусть в точке x^0 $\exists\ \varphi'(x^0)$ и $\varphi'(x^0)=0$.

Всегда ли $x^0\notin Sp\varphi$? Не всегда.

$\varphi'(1)=0$, но $x^0=1\in Sp\varphi$, т.к $\varphi'(x)>0$, при $x<1$ и близких к 1.

5. Смешанное расширение ант. игры.

$\Gamma=\langle P, Q, A(p,q)\rangle$, $\bar{\Gamma}=\langle\{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi)\rangle$

для матр. и непрерывной игре. В последней т-ма Фубини:

$$F(\varphi,\psi)=\int_X F(x,\psi)\,d\varphi(x)=\int_Y F(\varphi,y)\,d\psi(y)$$ –

– двойной интеграл равен повторным.

Определение решения в смеш. стр.

(p^0, q^0, v) и (φ^0, ψ^0, v).

6. Основная теорема матр. игр.

Док-во ссылкой на теорему о вогн.-вып. функции.

7. Основная теорема непрерывных игр. Перед доказательством теоремы нужно сформулировать (без док-ва) теорему Хелли о слабой компактности множества смешанных стратегий на отрезке, а также доказать две леммы (о существовании максиминной и минимаксной смешанных стратегий и о близости верхних и нижних значений игры для близких ф-ий выигрыша).

8. Свойства решений антагонистических игр в смешанных стратегиях. Необх. и достаточное условие того, чтобы пара см. стратегий и число были решением игры, свойство дополняющей нежёсткости и формула для значения игры. Док-ва для непрерывной игры, а формулировки для непрерывной и матричной игры

Задачи. 1. Для того, чтобы тройка (p°, q°, v) была решением матричной игры в смеш. стр. необх. и дост. чтобы

$$A(i, q^\circ) \le v \le A(p^\circ, j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n} \quad (*)$$

Док-во. Необходимость. Пусть (p°, q°, v) – реш. в см. стр. Тогда (p°, q°) – с. т. ф-ии $A(p, q)$ и $v = A(p^\circ, q^\circ)$, т.е.

$$A(p, q^\circ) \le A(p^\circ, q^\circ) = v \le A(p^\circ, q) \quad \forall p \in P \quad \forall q \in Q.$$

В частности при p, соотв. чистой стратегии i, и q, соотв. чистой стратегии j, получим $(*)$.

Достаточность. Пусть для тройки (p°, q°, v) $(*)$ выполнено. Докажем, что (p°, q°, v) – реш. в смеш. стратегиях.

Из $A(i, q^\circ) \le v$, $i=\overline{1,m}$, умножая i-е неравенство на p_i и складывая их, получим $A(p, q^\circ) \le v$ $\forall p \in P$.

Аналогично доказывается, что $A(p^0, q) \geq v \quad \forall q \in Q$.

Итак, $A(p, q^0) \leq v \leq A(p^0, q)$ при $\forall p \in P, \forall q \in Q$

Если $p = p^0, q = q^0$, то получим

$$A(p^0, q^0) \leq v \leq A(p^0, q^0) \Rightarrow v = A(p^0, q^0) \quad \text{ч.т.д.}$$

2. Доказать свойство доп. нежёсткости для решения (p^0, q^0, v) матричной игры.

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v$

2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow A(p^0, j) = v$

Следствие.

1) $A(i, q^0) < v \Rightarrow p_i^0 = 0$,

2) $A(p, j) > v \Rightarrow q_j^0 = 0$

Док-во. Докажем 1). Пусть при некотором i_1

$p^0_{i_1} > 0$, но $A(i_1, q^0) < v$. Но $A(i, q^0) \overset{(*)}{\le} v \ \forall i \ne i_1$,

Умножая эти неравенства на $p^0_i \geq 0$ и складывая их, получим $A(p^0, q^0) < v = A(p^0, q^0)$ (противоречие)

3. Доказать следующие формулы для значения матричной игры

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q)$$

Док-во. Заметим, что

$\max\limits_{p \in P} A(p, q) = \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q)$ при $\forall q \in Q$, поскольку

$A(p, q)$ линейна по p и $\max\limits_{p \in P}$ достигается в кр. точке мн-ва P, т.е. в одной из точек $p^i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, соотв. чистым стратегиям первого игрока.

Аналогично доказывается, что

$$\min_{q \in Q} A(p, q) = \min_{1 \le j \le n} A(p, j) \quad \forall p \in P.$$

Теперь по теореме 1.1

$$v = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} A(p, q) = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) \quad \text{и}$$

$$v = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} A(p, q) = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q). \quad \text{ч.т.д.}$$

метод решения матричных и непр. игр, основанный на проверке неравенств (*). В частности, когда (*) выполняются как равенства.

Стратегия $p^0 \in P$ называется выравнивающей, если
$A(p^0, j) \equiv const$,

Стратегия $q^0 \in Q$ — " — — " — — " —
$A(i, q^0) \equiv const$.

4. Если $\exists$ выравнивающие стратегии p^0 и q^0, то то это оптимальные стратегии.

Пусть $A(p^0, j) = C_1 \ \forall j$, $A(i, q^0) = C_2 \ \forall i$.

$q_j^0 A(p^0, j) = q_j C_1 \Rightarrow C_1 = A(p^0, q^0)$. Аналогично
$C_2 = A(p^0, q^0)$ и (*) выполнено как равенства
и p^0, q^0 — оптимальные смешанные стратегии.

5. Пусть $F(x,y)=|x-y|-(x-y)^2$; $X=[0,1]$, $Y=[0,1]$.

Доказать, что $\varphi^0(x)=x$, $\psi^0(y)=y$ - оптимальные смешанные стратегии.

Док-во. Покажем φ^0 и ψ^0 - выравнивающие стратегии, т.е.

$$F(\varphi^0,y)\equiv C_1 \text{ и } F(x,\psi^0)\equiv C_2.$$

$$F(\varphi^0,y)=\int_0^1[|x-y|-(x-y)^2]\,dx=\int_0^y(y-x)\,dx+\int_y^1(x-y)\,dx$$

$$-\int_0^1(x-y)^2\,dx=y^2-\frac{\cancel{y^2}}{2}+\frac{1-\cancel{y^2}}{2}-y(1-y)-\frac{1}{3}[(1-y)^3+y^3]=$$

$$=y^2+\frac{1}{2}-y-\frac{1}{3}[1-3y+3y^2-\cancel{y^3}+\cancel{y^3}]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Аналогично, $F(x,\psi^0)\equiv\frac{1}{6}\Rightarrow v=\frac{1}{6}$ и φ^0,ψ^0 - опт. стр.

5. Пусть (p^0, q^0, v) — решение матр. игры в смеш. стр.

Всегда ли верна импликация $A(p^0, j) = v \Rightarrow q_j^0 > 0$.

Не всегда. В матрице $A = (a_{ij} = a)$ все элементы равны a.
Поэтому $v = a$ и $A(p, j) = a$ $\forall p \in P$ и $\forall j$. Аналогично
$A(i, q) = a$ $\forall q \in Q$ и $\forall i$. Поэтому все стратегии
оптимальны.

6. Решить игру с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $a_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$

Решение существует в выравнивающих стратегиях

$$p_4^0 a_4 = A(p^0, 1) = v, \quad p_3^0 a_3 = v, \quad p_2^0 a_2 = v, \quad p_1^0 a_1 = v$$

$$p_i^0 = \frac{v}{a_i}, \quad 1 = \sum_{k=1}^{4} p_k^0 = v \cdot \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{a_k} \qquad v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{a_k}}$$

Аналогично $A(1,q^0) = a_1 q_4^0 = v$, $A(2,q^0) = a_2 q_3^0 = v$, $A(3,q^0) = a_3 q_2^0 = v$

$A(4,q^0) = a_4 q_1^0 = v$

$$q_4^0 = \frac{v}{a_1}, \quad q_3^0 = \frac{v}{a_2}, \quad q_2^0 = \frac{v}{a_3}, \quad q_1^0 = \frac{v}{a_4}$$

7. Для непрерывной игры на прямоугольнике доказать неравенства

$$\underline{v} = \max_{a \le x \le b} \min_{c \le y \le d} F(x,y) \le v \le \overline{v} = \min_{c \le y \le d} \max_{a \le x \le b} F(x,y)$$

Док-во

$$v = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{c \le y \le d} F(\varphi, y) \ge \max_{a \le x \le b} \min_{c \le y \le d} F(x,y),$$

поскольку $[a,b] \subset \{\varphi\}$. Аналогично

$$v = \min_{\psi \in \{\psi\}} \max_{a \le x \le b} F(x,\psi) \le \min_{c \le y \le d} \max_{a \le x \le b} F(x,y).$$ ч.т.д.

Аналогичная задача для матричной игры

8. Найти решение игры с матрицей $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a,d > b,c$. Существует решение в выравн. смеш. стратегиях:

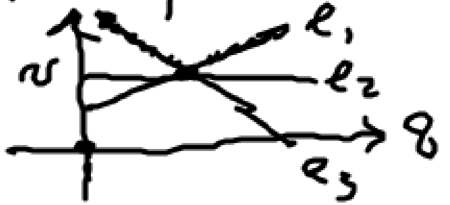
$$p_1^0 a + c(1-p_1^0) = v = p_1^0 b + d(1-p_1^0)$$

$$p_1^0 = \frac{d-c}{\underbrace{a+d-b-c}_{>0}}, \quad p_2^0 = 1-p_1 = \frac{a-b}{a+d-b-c}$$

$$v = \frac{a(d-c)+c(a-b)}{a+d-b-c} = \frac{ad-bc}{a+d-b-c} = \frac{|A|}{a+d-b-c}$$

Аналогично находится $q^0=(q_1^0, 1-q_1^0)$

9. Привести пример 3×2-матрицы, в которой первый игрок имеет оптимальную чистую стратегию, а второй только оптимальную смешанную.



$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad v=2$, $i^0=2$

$q^0=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Аналогично приведите пример, когда второй игрок имеет оптимальную чистую стратегию, а первый — нет.

10. Пусть в матрице A первая строка доминирует все остальные. Доказать игра имеет решение в чистых стратегиях.

Док-во. Вычёркиваем все строки, кроме первой. Берём j_0: $a_{1j_0} = \min\limits_{1 \le j \le n} a_{1j}$. Тогда $(1, j_0)$ - седл. точка матрицы A, $v = a_{1j_0}$.

11. Пусть в матрице A существует решение в чистых стратегиях. Матрица $\hat{A}$ получена вычёркиванием доминируемых строк и столбцов без использования выпуклых комбинаций. Тогда игра с матрицей $\hat{A}$ также имеет решение в чистых стратегиях.

Док-во. Пусть (i_0, j_0) – с.т. матрицы A, т.е.

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{ij_0} \quad \forall\, i, j.$$

Если строка i_1 доминирует строку i_0, то $a_{i_1 j} \geq a_{i_0 j}$ $\forall j$

поэтому $\min\limits_{1\le j\le n} a_{i_1 j} \geq \min\limits_{1\le j\le n} a_{i_0 j} = v \Rightarrow i_1$ – максиминная стратегия

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ Отсюда (i_1, j_0) – с.т. матрицы A, поскольку j_0 – минимаксная стратегия. Но (i_1, j_0) – с.т. матрицы $\hat{A}$, полученной вычёркиванием i_0-й строки. ч.т.д.

$\hat{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

11. Для игры с матрицей $A=\begin{pmatrix}7&0\\2&5\\1&6\end{pmatrix}$ выписать задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} &z_1+z_2+z_3 \to \min \\ &7z_1+2z_2+z_3 \geq 1 \\ &5z_2+6z_3 \geq 1 \quad z_i \geq 0,\ i=1,2,3 \end{aligned} \qquad \Bigg\| \qquad \begin{aligned} &w_1+w_2 \to \max \\ &7w_1 \le 1,\ 2w_1+5w_2 \le 1 \\ &w_1+6w_2 \le 1,\ w_j \geq 0. \end{aligned}$$

9. Теоремы о доминировании строк и столбцов в матричных играх. Доказательство Теоремы о доминировании строк. В нём используется свойство дополняющей нежёсткости. В каком месте?

10. Графический метод решения игр с матрицами $2 \times n$ и $m \times 2$.
Используются формулы для значения матр. игры

$$v = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q).$$

Ссылка на следствие Теоремы $\max_{p \in P} A(p, q) = \max_{1 \le i \le n} A(i, q)$

и $\min_{q \in Q} A(p, q) = \min_{1 \le j \le n} A(p, j)$

11. Сведение решения матр. игры к паре двойственных задач лин. прогр. Здесь также используются формулы для v.

Задача 12. Пусть $B=(a_{ij}+C)_{m\times n}$. Доказать, что оптимальные стратегии игроков в играх с матрицами $A=(a_{ij})$ и B совпадают, а значение

$$v(B)=v(A)+C.$$

Решение. Пусть (p^0, q^0, v) — решение игры с матрицей A, т.е.

$$A(i,q^0)\le v(A)\le A(p^0,j)\quad \forall i,j \quad (*)$$

но

$$B(i,q^0)=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+c)q_j^0=A(i,q^0)+C$$

$B(p^0,j)=B(p^0,j)+C$. Поэтому из $(*)$ следует $B(i,q^0)\le v(A)+C\le B(p^0,j)\ \forall i,j \Rightarrow$

$(p^0, q^0, v(A)+c)$ — решение игры с матр. B.

13. Сформулировать свойство дополняющей нежёсткости для задач лин. прогр. экв. матр. игре.

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \to \min \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} w_j \to \max$$

$$w_j: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \geq 1,\ j=\overline{1,n} \quad (I) \qquad z_i: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j \leq 1,\ i=\overline{1,m} \quad (II)$$

$$z_i \geq 0,\ i=\overline{1,m} \qquad\qquad w_j \geq 0,\ j=\overline{1,n}$$

Свойство доп. нежёсткости задач (I) и (II).

Пусть z^0, w^0 — опт. решения задач

Тогда $z_i^0 > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j^0 = 1$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j^0 < 1 \Rightarrow z_i^0 = 0$

$w_j^0 > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot z_i^0 = 1$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot z_i^0 > 1 \Rightarrow w_j^0 = 0$.

$z^0 = v p^0$, $w^0 = v q^0$.